УДК 621.837
Дученко К.О., Хорошев К.Г.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

Кінематичне дослідження кривошипно-повзунного механізму методами векторної алгебри.

Векторний підхід дослідження рухів точок тіл та систем тіл, що є основним для теоретичних викладок в теоретичній механіці [1], при розв'язанні конкретних задач кінематики плоских механізмів майже не використовується. Затребуваними методами кінематичного дослідження плоских механізмів є метод замкнутих векторних контурів, метод передаточних функцій, метод перетворення координат [2-4], метод координатних планів [5] тощо. Усі ці методи об'єднує визначення характерних кутів повороту ланок механізму, тобто розв'язання базується на використанні основних та обернених тригонометричних функцій, що при алгоритмізації та комп'ютерної реалізації вимагає певної обережності при їх застосуванні.

В даній роботі запропонований векторний спосіб кінематичного аналізу кривошипно-повзунного механізму методами векторної алгебри, перевагою якого є отримання аналітичних виразів законів руху характерних точок механізму та інших кінематичних характеристик ланок механізму, позбавлених тригонометричних функцій, що дозволить при комп'ютерному моделюванні полегшити алгоритмізацію і програмний код.

Розглянемо рух кривошипно-повзунного механізму (рис. 1), довжини ланок якого відомі: кривошипа $AB - l_1$, шатуна $BC - l_2$. Положення напрямної руху повзуна є визначеним, її відстань до шарніра A покладемо $KA = l_0$. Пов'яжемо з напрямною руху повзуна правосторонню нерухому систему координат $Kx_0y_0z_0$ (вісь Kx_0 лежить вздовж напрямної), яку на рис. 1 показано відповідно ортами $\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$ і $\vec{k}_0$. Аналогічно, для кривошипа AB та шатуна BC задаємо рухомі системи $Ax_1y_1z_1$ (вісь Ax_1 лежить вздовж кривошипа) з ортами $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$ і $\vec{k}_1$ та $Bx_2y_2z_2$ (вісь Bx_2 лежить вздовж шатуна) з ортами $\vec{i}_2$, $\vec{j}_2$ і $\vec{k}_2$. Всі введені системи координат орієнтовані так, що орти $\vec{k}_0$, $\vec{k}_1$ та $\vec{k}_2$ завжди паралельні. Інші орти рухомих систем координат можуть бути представлені співвідношеннями

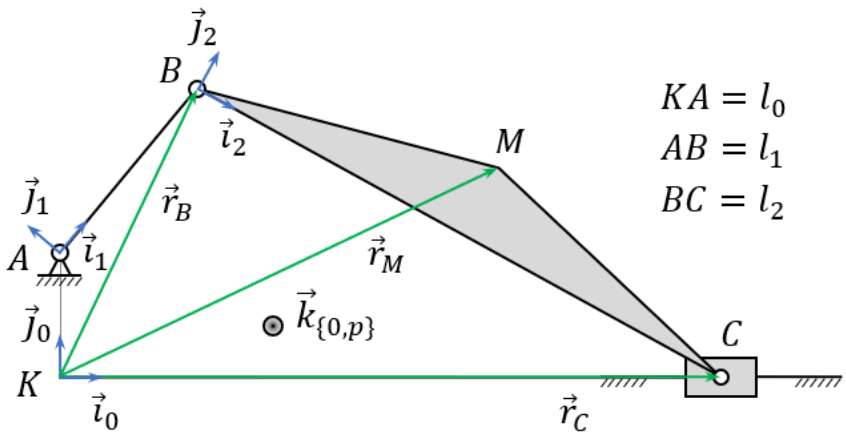

Рис. 1. Структурна схема кривошипно-повзунного механізму

$$\vec{\imath}_p = a_p\vec{\imath}_0 + b_p\vec{\jmath}_0, \quad \vec{\jmath}_p = [\vec{k}_p, \vec{\imath}_p] = -b_p\vec{\imath}_0 + a_p\vec{\jmath}_0, \tag{1}$$

де $a_p = (\vec{\imath}_p, \vec{\imath}_0)$, $b_p = (\vec{\imath}_p, \vec{\jmath}_0)$ $p = 1{,}2$; вирази в круглих та квадратних дужках означають скалярний та векторний добутки векторів відповідно. Оскільки орти одиничної довжини, то

$$a_p^2 + b_p^2 = 1. \tag{2}$$

Припустимо, що радіус-вектор т. B є заданим в нерухомій системі координат $Kx_0y_0z_0$ 456

$$\vec{r}_B = l_0\vec{\jmath}_0 + l_1\vec{\imath}_1 = l_1a_1\vec{\imath}_0 + (l_1b_1 + l_0)\vec{\jmath}_0.$$

Тут $a_1 = a_1(t)$ і $b_1 = b_1(t)$ – відомі функції, t – час.

Позначимо $s_0 = s_0(t)$ за x_0-координату т. C повзуна в нерухомій системі координат $Kx_0y_0z_0$. Представимо радіус-вектор т. C повзуна за допомогою очевидних векторних рівнянь

$$\vec{r}_\mathrm{C} = s_0\vec{\imath}_0, \quad \vec{r}_\mathrm{C} = \vec{r}_B + l_2\vec{\imath}_2 = (l_1a_1 + l_2a_2)\vec{\imath}_0 + (l_1b_1 + l_2b_2 + l_0)\vec{\jmath}_0. \tag{3}$$

Помножимо обидві рівності (3) скалярно на $\vec{\jmath}_0$, прирівняємо їх і отримаємо

$$0 = l_1b_1 + l_2b_2 + l_0,$$

звідки знаходимо

$$b_2 = -\frac{l_0 + l_1b_1}{l_2}. \tag{4}$$

Підставляючи співвідношення (4) в рівняння (2), після елементарних перетворень отримуємо

$$a_2 = \pm\sqrt{(1 - b_2^2)} = \pm\frac{\sqrt{l_2^2 - (l_0 + l_1b_1)^2}}{l_2}. \tag{5}$$

Знак «$\pm$» у рівнянні (5) вказує на дві рівнозначні можливості розташування повзуна на напрямній Kx_0 при одному положенні кривошипа. Покладемо $c = \pm 1$ (вибираємо $c = +1$ або $c = -1$) та, використовуючи співвідношення (3) - (5), остаточно одержуємо закон руху т. C повзуна

$$\vec{r}_C = s_0 \vec{\imath}_0 = (l_1 a_1 + l_2 a_2)\vec{\imath}_0 = \left(l_1 a_1 \ + c\sqrt{l_2^2 - (l_0 + l_1 b_1)^2} \right) \vec{\imath}_0. \qquad (6)$$

Крайніх положень повзун досягне, коли $\vec{\imath}_2 = \pm \vec{\imath}_1$, тобто, $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$ або $a_2 = -a_1$, $b_2 = -b_1$. З формул (4), (5) знаходимо для «правого» крайнього положення

$$a_1 = c \frac{\sqrt{(l_2 + l_1)^2 - l_0^2}}{l_2 + l_1}, \quad b_1 = -\frac{l_0}{l_2 + l_1},$$

для «лівого» -

$$a_1 = -c \frac{\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - l_0^2}}{l_2 - l_1}, \quad b_1 = \frac{l_0}{l_2 - l_1},$$

Підставляючи останні співвідношення в (6), висновуємо, що траєкторією руху повзуна буде відрізок на осі Kx_0 напрямної

$$\begin{cases} \sqrt{(l_2 - l_1)^2 - l_0^2} \le s_0 \le \sqrt{(l_2 + l_1)^2 - l_0^2}, & \mathrm{c} = +1; \\ -\sqrt{(l_2 + l_1)^2 - l_0^2} \le s_0 \le -\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - l_0^2}, & \mathrm{c} = -1. \end{cases}$$

Формули (1), (4), (5) дозволяють знайти радіус-вектор будь-якої т. M шатуна, що в системі координат $Bx_2y_2z_2$ має координати $(x_{2M}, y_{2M}, 0)$,

$$\begin{aligned} \vec{r}_M &= \vec{r}_B + x_{2M}\vec{\imath}_2 + y_{2M}\vec{\jmath}_2 = \\ &= \big(l_1 a_1 + x_{2M}(a_2 - b_2)\big)\vec{\imath}_0 + \big(l_1 b_1 + y_{2M}(a_2 + b_2)\big)\vec{\jmath}_0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Диференціюючи (6), (7) за часом, отримуємо вирази для швидкостей т. C повзуна та т. M шатуна

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \dot{s}_0 \vec{\imath}_0 = (l_1 \dot{a}_1 + l_2 \dot{a}_2)\vec{\imath}_0; \\ \vec{\mathrm{v}}_M &= \left(l_1 \dot{a}_1 + x_{2M}\left(\dot{a}_2 - \dot{b}_2\right)\right)\vec{\imath}_0 + \left(l_1 \dot{b}_1 + y_{2M}\left(\dot{a}_2 + \dot{b}_2\right)\right)\vec{\jmath}_0, \end{aligned} \qquad (8)$$

де величина з крапкою означає похідну за часом

$$\dot{a}_1 = \frac{da_1}{dt}, \quad \dot{b}_1 = \frac{db_1}{dt}, \quad \dot{a}_2 = \frac{b_2 \dot{b}_1}{l_2 a_2}, \quad \dot{b}_2 = -\frac{l_1 \dot{b}_1}{l_2}.$$

Після диференціювання за часом співвідношень (8), для тих же точок одержуємо формули пришвидшень

$$\vec{w}_C = \ddot{s}_0 \vec{\iota}_0 = (l_1 \ddot{a}_1 + l_2 \ddot{a}_2)\vec{\iota}_0;$$
$$\vec{w}_M = \left(l_1 \ddot{a}_1 + x_{2M}(\ddot{a}_2 - \ddot{b}_2)\right)\vec{\iota}_0 + \left(l_1 \ddot{b}_1 + y_{2M}(\ddot{a}_2 + \ddot{b}_2)\right)\vec{j}_0. \quad (9)$$

Тут

$$\ddot{a}_1 = \frac{d^2 a_1}{dt^2},\ \ \ddot{b}_1 = \frac{d^2 b_1}{dt^2},\ \ \ddot{a}_2 = \frac{(b_2 \ddot{b}_1 + \dot{b}_2 \dot{b}_1)a_2 - b_2 \dot{b}_1 \dot{a}_2}{l_2 a_2^2},\ \ \ddot{b}_2 = -\frac{l_1 \ddot{b}_1}{l_2}.$$

Вирази для векторів кутової швидкості $\vec{\omega}_2$ та кутового пришвидшення $\vec{\varepsilon}_2$ шатуна мають вигляд [1]

$$\vec{\omega}_2 = (\dot{\vec{\iota}}_2, \vec{j}_2)\vec{k}_2,\quad \vec{\varepsilon}_2 = \left((\ddot{\vec{\iota}}_2, \vec{j}_2) + (\dot{\vec{\iota}}_2, \dot{\vec{j}}_2)\right)\vec{k}_2.$$

Диференціюючи за часом рівняння (1) і підставляючи їх в останні співвідношення, знаходимо

$$\vec{\omega}_2 = (a_2 \dot{b}_2 - \dot{a}_2 b_2)\vec{k}_2,\quad \vec{\varepsilon}_2 = (a_2 \ddot{b}_2 - \ddot{a}_2 b_2)\vec{k}_2. \quad (10)$$

Розповсюдимо запропоновану методику для визначення кінематичних характеристик плоского механізму ІІ класу, структурні групи якого належать виключно до ІІ класу 2-го виду [2]. Наприклад, приєднаємо до т. M кривошипно-повзунного механізму одну таку структурну групу (рис. 2).

458

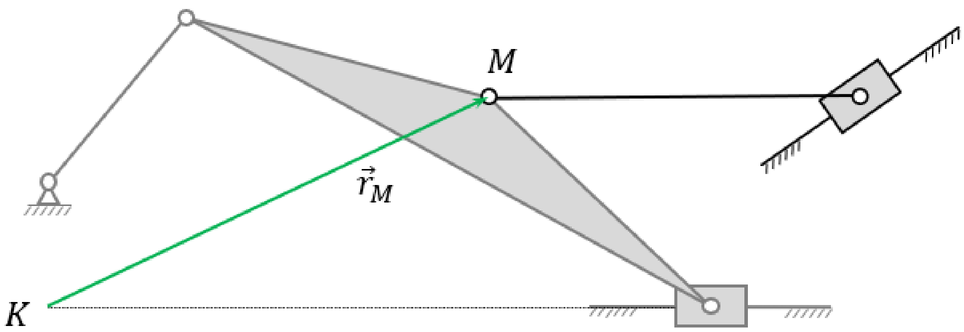

Рис. 2. Структурна схема плоского механізму ІІ класу, структурні групи якого належать виключно до ІІ класу ІІ групи 2-го виду

Оскільки радіус-вектор $\vec{r}_M$ визначається формулою (7), то формально поклавши KM за «кривошип» та подумки відкинувши рухомі ланки AB, BC і повзун C, матимемо уявний кривошипно-повзунний механізм з заданим законом руху кривошипа. Позначимо літери характерних точок уявного механізму відповідно до рис. 1. Тоді вісь Kx_0 нерухомої системи координат $Kx_0y_0z_0$ лежить вздовж напрямної руху повзуна приєднаної структурної групи; для уявного кривошипа AB (на рис. 2 позначений KM) та шатуна BC (приєднаної структурної групи) введені відповідні рухомі системи координат $Ax_1y_1z_1$ та $Bx_2y_2z_2$; тощо. Для орта $\vec{\imath}_1$ системи координат $Ax_1y_1z_1$ маємо

$$\vec{\imath}_1 = \frac{\vec{r}_M}{|\vec{r}_M|}.$$

Покладемо знову $l_0 = KA$, $l_1 = |\vec{r}_M|$, l_2 – довжина шатуна структурної групи. Помітимо, що $l_1 \neq const$. Величини a_1, b_1, a_2, b_2 та радіус-вектори точок B та C уявного механізму визначається за вище наведеними формулами, тоді як для швидкості та пришвидшення т. C знаходимо

$$\vec{v}_C = \dot{s}_0\vec{\imath}_0 = \left(l_1\dot{a}_1 + \dot{l}_1 a_1 + l_2\dot{a}_2\right)\vec{\imath}_0,$$

$$\vec{w}_C = \ddot{s}_0\vec{\imath}_0 = \left(l_1\ddot{a}_1 + 2\dot{l}_1\dot{a}_1 + \ddot{l}_1 a_1 + l_2\ddot{a}_2\right)\vec{\imath}_0,$$

де

$$\dot{a}_1 = \frac{da_1}{dt}, \quad \dot{b}_1 = \frac{db_1}{dt}, \quad \ddot{a}_1 = \frac{d^2a_1}{dt^2}, \quad \ddot{b}_1 = \frac{d^2b_1}{dt^2},$$

$$\dot{a}_2 = \frac{b_2\dot{b}_1}{l_2a_2}, \quad \dot{b}_2 = -\frac{l_1\dot{b}_1 + \dot{l}_1 b_1}{l_2},$$

$$\ddot{a}_2 = \frac{\left(b_2\ddot{b}_1 + \dot{b}_2\dot{b}_1\right)a_2 - b_2\dot{b}_1\dot{a}_2}{l_2a_2^2}, \quad \ddot{b}_2 = -\frac{l_1\ddot{b}_1 + 2\dot{l}_1\dot{b}_1 + \ddot{l}_1\ddot{b}_1}{l_2}.$$

З врахуванням останніх формул вирази (10) залишаються справедливими для визначення векторів кутової швидкості $\vec{\omega}_2$ та кутового пришвидшення $\vec{\varepsilon}_2$ шатуна уявного механізму (шатуна приєднаної структурної групи).

Отримані формули радіусів-векторів ключових точок кривошипно-повзунного механізму були використані при створенні його твердотільної моделі та анімації за допомогою комп’ютерної програми OpenSCAD [6], що є САПР для параметричної побудови твердотільних тривимірних об’єктів та вільно розповсюджується згідно загальної громадської ліцензії GNU, версії 2 [7]. На рис. 3 показано певне положення механізму.

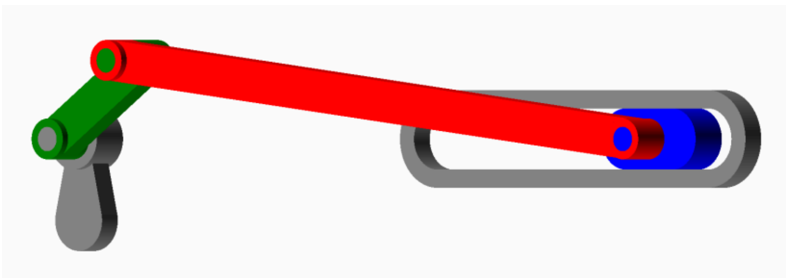

Рис. 3. Твердотільна модель певного положення кривошипно-повзунного механізму в програмному середовищі OpenSCAD

Висновки:

1. Проведено кінематичне дослідження кривошипно-повзунного механізму методами векторної алгебри, а саме: отримані аналітичні вирази для радіусів-векторів, швидкостей та пришвидшень характерних точок механізму, векторів кутової швидкості та кутового пришвидшення шатуна.

2. Показано, як дана методика може бути застосована для визначення кінематичних характеристик плоского механізму II класу, структурні групи якого належать виключно до II класу 2-го виду [2].

3. З використанням формул радіусів-векторів певних точок кривошипно-повзунного механізму створена його комп’ютерна анімація в програмному середовищі OpenSCAD.

Список використаних джерел

1. Павловський М. А. Теоретична механіка / М. А. Павловський. – К: Техніка, 2002. – 512 с.

2. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М: Наука, 1988. – 640 с.

3. Заховайко О. П. Теорія механізмів і машин. Курс лекцій для студентів спеціальності “Динаміка і міцність машин” / О. П. Заховайко. – К: НТУУ “КПІ”, 2010. – 243 с.

4. Кініцький Я. Т. Теорія механізмів і машин в системі Mathcad: навч. посіб. / Я. Т. Кініцький, В. О. Харжевський, М. В. Марченко. – Хмельницький: РВЦ ХНУ, 2014. – 324 с.

5. Гончар М. О. Теорія механізмів і машин: підручник / М. О. Гончар. – К.: Видавничий дім “Вінниченко”, 2011. – 456 с.

6. OpenSCAD. The Programmers Solid 3D CAD Modeller [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://openscad.org/.

7. Загальна громадська ліцензія GNU, версія 2 [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.gnu.org/licenses/old-licenses/gpl-2.0.html